



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 18.02.2023,

Clasa a XI-a

○ Timp de lucru: 180 de minute.

○ Fiecare problemă se punctează cu 0 – 7 puncte.

Problema 1. Se consideră un triunghi ABC precum și, folosind notațiile uzuale, determinanții:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2A & a^2 \\ 1 & \cos 2B & b^2 \\ 1 & \cos 2C & c^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sin A & a^2 \\ 1 & \sin B & b^2 \\ 1 & \sin C & c^2 \end{vmatrix}. \text{ Arătați că:}$$

(a) $\Delta_1 = 0$. (b) dacă $\Delta_2 = 0$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Problema 2. Se spune că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este *interesantă* dacă $A^2 - A = 7 \cdot I_2$. Arătați că:

(a) există cel puțin două matrice *interesante* cu elementele numere întregi.

(b) Dacă matricea A este *interesantă*, atunci matricea $B = A + 2 \cdot I_2$ este inversabilă.

Problema 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - x^2$, precum și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = f(a_n), \forall n \geq 1.$$

(a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

(b) Determinați numărul întreg k pentru care $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - f(x)}{\sin k\pi x} = \frac{1}{2\pi}$.

Problema 4. (a) Dați un exemplu de trei șiruri $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \text{ astfel încât: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \frac{\pi}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + c_n) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Demonstrați că șirul $x_n = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{k^2 - k + 1}, \forall n \geq 1$, este convergent și are limita egală cu $\frac{\pi}{2}$.